

Тогда уравнение (1) с начальными условиями (2) будет равносильно интегро-дифференциальному уравнению

$$y(x) = \sum_{i=1}^n C_i y_i(x) + \varphi(x) + \lambda \int_{x_0}^x H(x, \eta) F[y(\eta)] d\eta, \quad (4)$$

где $H(x, \eta)$ есть известная функция Коши, $\{y_i(x)\}$ — фундаментальная система уравнения

$$L[y(x)] = 0; \quad \varphi(x) = \int_{x_0}^x H(x, \eta) f(\eta) d\eta$$

и постоянные C_k определяются из условий

$$C_1 y_1^{(k)}(x_0) + \dots + C_n y_n^{(k)}(x_0) = y_0^{(k)} \quad (k = 0, 1, \dots, n-1). \quad (5)$$

Очевидно,

$$L[\varphi(x)] = f(x). \quad (6)$$

Лемма 1. Всякое решение уравнения (4) является также решением уравнения (1).

Действительно, пусть $y_0(x)$ есть решение уравнения (4). Тогда

$$y_0(x) \equiv \sum_{i=1}^n C_i y_i(x) + \varphi(x) + \lambda \int_{x_0}^x H(x, \eta) F[y_0(\eta)] d\eta.$$

Применяя к этому тождеству оператор L , получим

$$L[y_0(x)] \equiv L[\varphi(x)] + \lambda F[y_0(x)].$$

Откуда, в силу (3) и (6),

$$L[y_0(x)] \equiv f(x) + \lambda \int_a^b \sum_{\alpha=0}^m K_{\alpha}(x, t) y_0^{(\alpha)}(t) dt.$$

Следствие. Если функция $F[y_0(x)]$ однозначна, то вследствие единственности функции Коши $H(x, \eta)$ и однозначной разрешимости системы (5), формула (4) определяет единственное решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям (2).

Чтобы фактически найти решение уравнения (4), преобразуем его к интегральному уравнению. Для этого к обеим частям уравнения (4) применим оператор

$$F[y(x)] = \sum_{i=1}^n [F[y_i(x)] + F[\varphi(x)] + \lambda \int_a^b \sum_{\alpha=0}^m K_{\alpha}(x, t) dt \left(\int_{x_0}^t H(t, \eta) F[y(\eta)] d\eta \right)] \quad (2)$$

Интегральный член этого равенства представим в виде двух слагаемых

$$\begin{aligned} & \sum_{\alpha=0}^m \lambda \int_a^{x_0} K_{\alpha}(x, t) dt \left(\int_{x_0}^t H(t, \eta) F[y(\eta)] d\eta \right) + \\ & + \sum_{\alpha=0}^m \lambda \int_{x_0}^b K_{\alpha}(x, t) dt \left(\int_{x_0}^t H(t, \eta) F[y(\eta)] d\eta \right) \quad (2) \end{aligned}$$